

ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε ότι:

$$P(-1) = 6 \Leftrightarrow 2(-1)^3 + (-1)^2 + \alpha(-1) + \beta = 6 \Leftrightarrow -1 - \alpha + \beta = 6 \Leftrightarrow -\alpha + \beta = 7$$

και

$$P(2) = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^3 + 2^2 + \alpha \cdot 2 + \beta = 12 \Leftrightarrow 20 + 2\alpha + \beta = 12 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -8,$$

οπότε οι αριθμοί α, β είναι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} -\alpha + \beta = 7 \\ 2\alpha + \beta = -8. \end{cases}$

ii. Για να υπολογίσουμε τους α, β λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 7 \\ 2\alpha + \beta = -8 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} -\alpha + \beta = 7 \\ 3\alpha = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(-5) + \beta = 7 \\ \alpha = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -5. \end{cases}$$

β) Για να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο, κάνουμε τη διαίρεση $P(x): (x+2)$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

2	1	-5	2	-2
	-4	6	-2	
2	-3	1	$v = 0$	

Άρα, το πηλίκο της διαίρεσης $P(x): (x+2)$ είναι το $\pi(x) = 2x^2 - 3x + 1$ και το υπόλοιπο $v = 0$.

γ) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1$$

και

$$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Το πρόσημο του γινομένου $(x+2)(2x^2 - 3x + 1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x^2 - 3x + 1$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$(x + 2)(2x^2 - 3x + 1)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$(x + 2)(2x^2 - 3x + 1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$