

Λύση

α) Από τη σχέση  $f(x) \cdot f'(x) = -x+1$  στο  $(0,2)$  έχουμε

$$f(x) \cdot f'(x) = -x+1 \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) = -2x+2 \Leftrightarrow (f^2(x))' = (-x^2+2x)' \text{ για κάθε}$$

$x \in (0,2)$ . Όμως η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,2]$ , άρα και η  $f^2$  είναι συνεχής στο  $[0,2]$ , οπότε  $f^2(x) = -x^2+2x+c_1$  για κάθε  $x \in [0,2]$ .

Για  $x=1$  έχουμε  $f^2(1) = -1^2+2 \cdot 1+c_1 \Leftrightarrow 1=1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$ .

Συνεπώς  $f^2(x) = -x^2+2x$  για κάθε  $x \in [0,2]$ .

β) Είναι  $-x^2+2x \neq 0$  για κάθε  $x \in (0,2)$  άρα και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (0,2)$  και αφού η  $f$  είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στο  $(0,2)$ . Όμως  $f(1) > 0$  οπότε

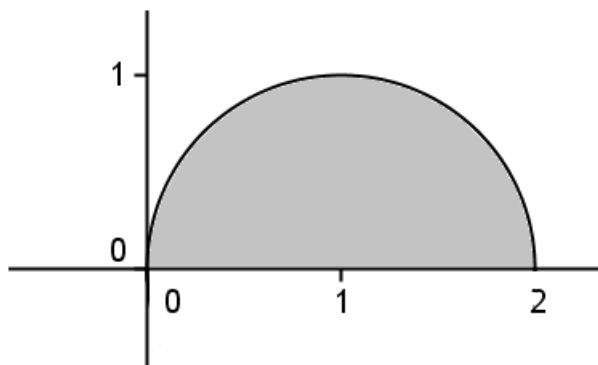
$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0,2) \text{ και άρα } f(x) = \sqrt{-x^2+2x}, x \in (0,2).$$

Επίσης  $f^2(0) = -0^2+2 \cdot 0 = 0$  οπότε  $f(0) = 0$  και  $f^2(2) = -2^2+2 \cdot 2 = 0$  οπότε

$$f(2) = 0. \text{ Τελικά } f(x) = \sqrt{-x^2+2x}, x \in [0,2].$$

γ) Αν θέσουμε  $y = f(x)$  με  $y \geq 0$  έχουμε

$y = \sqrt{-x^2+2x} \Leftrightarrow y^2 = -x^2+2x \Leftrightarrow x^2-2x+y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 1$   
που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της  $f$  αποτελείται από τα σημεία του κύκλου με κέντρο  $K(1,0)$  και ακτίνα 1 που δεν είναι κάτω από το  $xx'$ , δηλαδή το ημικύκλιο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



δ) Αφού  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [0,2]$ , το  $\int_0^2 f(x)dx$  παριστάνει το εμβαδόν μεταξύ της

$C_f$ , του  $x'x$  και των κατακόρυφων ευθειών  $x=0$  και  $x=2$ , δηλαδή το εμβαδόν

του μισού κυκλικού δίσκου με κέντρο  $K(1,0)$  και ακτίνα 1 (της σκιασμένης

επιφάνειας του παραπάνω σχήματος) και άρα  $\int_0^2 f(x)dx = \frac{\pi \cdot \rho^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$ .