

#### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $[0,2]$  η οποία είναι συνεχής στο  $[0,2]$ , παραγωγίσιμη στο  $(0,2)$  και ισχύουν  $f(1)=1$  και  $f(x) \cdot f'(x) = -x+1$ , για κάθε  $x \in (0,2)$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f^2(x) = -x^2 + 2x$  για κάθε  $x \in [0,2]$ .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$  για κάθε  $x \in [0,2]$ .

(Μονάδες 6)

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  είναι ημικύκλιο με κέντρο  $K(1,0)$  και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε το  $\int_0^2 f(x)dx$ .

(Μονάδες 6)