

ΛΥΣΗ

α)

- i. Η γραφική παράσταση της f εφάπτεται της $\varepsilon: y = \frac{1}{4}$ στο $x_0 = 0$ άρα οι συντεταγμένες του σημείου $(0, f(0))$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε , οπότε $f(0) = \frac{1}{4}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda = 0$ ισούται με την παράγωγο στο $x_0 = 0$, δηλαδή $f'(0) = 0$.

ii. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x) - 1}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{1}{4}}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x}}{\frac{\eta\mu x \cdot f(x)}{x}} =$$

$$4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}}{\frac{\eta\mu x}{x} \cdot f(x)} \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής στο } 0 \\ \text{ως παραγωγίσιμη σε αυτό}}}{=} 4 \cdot \frac{f'(0)}{1 \cdot f(0)} = 4 \cdot \frac{0}{1 \cdot \frac{1}{4}} = 0.$$

β)

- i. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$ οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.

$$\text{Για κάθε } x \in (0, 1] \text{ ισχύει: } x > 0 \stackrel{f'}{\underset{\text{γν. αύξουσα}}{\Rightarrow}} f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0.$$

$$\text{Είναι } f'(0) = 0.$$

$$\text{Άρα } f'(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

- ii. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι και συνάρτηση "1-1".

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(0) \stackrel{f}{\underset{1-1}{\Leftrightarrow}} x = 0.$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο με:

$$E = \int_0^1 |f'(x)| dx \stackrel{(βi)}{=} \int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$