

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f , να εφάπτεται της $\varepsilon: y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1) = 1$.

α) Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(0) = \frac{1}{4}$ και $f'(0) = 0$.

(Μονάδες 06)

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x) - 1}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 0$.

(Μονάδες 07)

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

(Μονάδες 06)

- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f' , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

(Μονάδες 06)