

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow 0 < e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{x_1} + 1} > \frac{1}{e^{x_2} + 1} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επιπλέον η f είναι συνεχής και

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = +\infty$

και

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 1$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 0 + 1 = 1$

$$\text{Οπότε } f(\mathbb{R}) = f((-\infty, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, 1)$$

β) Η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, οπότε είναι «1-1», άρα αντιστρέφεται.

Αν $f(x) = y, y \in (0, 1)$, τότε για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\frac{1}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow e^x + 1 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{y} - 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1-y}{y} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1-y}{y}$$

$$\text{Άρα, } f^{-1}(x) = \ln \frac{1-x}{x}, x \in (0, 1).$$