

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 3$. Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$ είναι: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ (1).

$f(0) = 1$ και $f'(0) = -3$, άρα η σχέση (1) γίνεται: $y - 1 = -3x \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

β)

i. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	+	-	+	
f				

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$ το $f(-1) = 3$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$ το $f(1) = -1$.

ii. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	+	
f			

Η f είναι κοίλη ή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή ή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $[0, +\infty)$. Η γραφική της παράσταση έχει σημείο καμπής το $(0, f(0))$ ή το $(0, 1)$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.

$f(-1) = 3$ και $f(1) = -1$, όπως βρήκαμε στο β) i. ερώτημα. Άρα $f(-1) \cdot f(1) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (-1, 1)$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$ (από το β)ι. ερώτημα) η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$ και $f(0) \cdot f(1) < 0$, άρα οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano ισχύουν στο $[0,1] \subseteq [-1,1]$, οπότε η ρίζα x_0 που βρήκαμε, ανήκει στο διάστημα $(0,1)$, επομένως είναι θετική.