

ΛΥΣΗ

α) i. Για κάθε $t \in [0, 3]$, είναι:

$$\begin{aligned} v(t) &= x'(t) = (t-2)'(t-1)^2 + (t-2)((t-1)^2)' \\ &= (t-1)^2 + 2(t-2)(t-1) \\ &= (t-1)[(t-1) + 2(t-2)] \\ &= (t-1)(3t-5). \end{aligned}$$

Το κινητό είχε ταχύτητα μηδέν μόνο όταν $v(t) = 0$. Είναι $v(t) = 0 \Leftrightarrow$

$$(t-1)(3t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ή } t = \frac{5}{3}. \text{ Οπότε το κινητό ήταν στιγμιαία ακίνητο (ταχύτητα}$$

μηδέν) τις χρονικές στιγμές 1 sec και $\frac{5}{3}$ sec.

ii. Έχουμε:

$$\begin{cases} v(t) > 0 \\ t \in [0, 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(3t-5) > 0 \\ t \in [0, 3] \end{cases} \Leftrightarrow t \in [0, 1) \cup \left(\frac{5}{3}, 3\right] \text{ και } \begin{cases} v(t) < 0 \\ t \in [0, 3] \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left(1, \frac{5}{3}\right).$$

Οπότε το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά στα χρονικά διαστήματα $[0, 1)$, $\left(\frac{5}{3}, 3\right]$

και προς τα αριστερά, στο χρονικό διάστημα $\left(1, \frac{5}{3}\right)$.

β) Από τη χρονική στιγμή 0 sec ως τη χρονική στιγμή 1 sec το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και διήνυσε διάστημα

$$S_1 = |x(1) - x(0)| = |0 - (0-2)(0-1)^2| = 2 \text{ m.}$$

Από τη χρονική στιγμή 1 sec ως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec το κινητό Α κινήθηκε προς

τα αριστερά και διήνυσε διάστημα

$$S_2 = \left| x\left(\frac{5}{3}\right) - x(1) \right| = \left| \left(\frac{5}{3} - 2\right)\left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 - 0 \right| = \frac{4}{27} \text{ m.}$$

Από τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec ως τη χρονική στιγμή 3 sec το κινητό Α κινήθηκε προς

τα δεξιά και διήνυσε διάστημα

$$S_3 = \left| x(3) - x\left(\frac{5}{3}\right) \right| = \left| (3-2)(3-1)^2 - \left(\frac{5}{3} - 2\right)\left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 \right| = \frac{112}{27} \text{ m.}$$

Άρα το συνολικό διάστημα που διήνυσε το κινητό Α από τη χρονική στιγμή 0 sec έως τη χρονική στιγμή 3 sec είναι:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 2 + \frac{4}{27} + \frac{112}{27} = \frac{170}{27} \text{ m.}$$

γ) Η μέση ταχύτητα $\bar{v}$ στο διάστημα $\left[1, \frac{5}{3}\right]$ είναι ίση με $\bar{v}_{\left[1, \frac{5}{3}\right]} = \frac{x\left(\frac{5}{3}\right) - x(1)}{\frac{5}{3} - 1} \text{ m/sec.}$

Όμως η συνάρτηση x είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\left[1, \frac{5}{3}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(1, \frac{5}{3}\right)$, επομένως από την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει

$$t_0 \in \left(1, \frac{5}{3}\right) \text{ τέτοιο, ώστε } x'(t_0) = \frac{x\left(\frac{5}{3}\right) - x(1)}{\frac{5}{3} - 1} \Rightarrow v(t_0) = \bar{v}_{\left[1, \frac{5}{3}\right]} \text{ και έπεται το}$$

ζητούμενο.