

ΛΥΣΗ

α) Αφού η περίμετρος του παραθύρου είναι 4 m, θα έχουμε  $\pi \cdot x + 2x + 2y = 4$ , άρα

$$\frac{\pi}{2}x + x + y = 2, \text{ οπότε } \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x + y = 2, \text{ έτσι θα είναι } y = -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2.$$

$$\text{Πρέπει } y > 0 \Leftrightarrow 2 > \frac{\pi+2}{2}x \Leftrightarrow x < \frac{4}{\pi+2}.$$

$$\text{Τότε } E(x) = \frac{\pi x^2}{2} + 2xy = \frac{\pi}{2}x^2 + 2x \left(-\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2\right) = \frac{\pi}{2}x^2 + 4x - (\pi+2)x^2 =$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \pi - 2\right)x^2 + 4x = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2 + 4x.$$

$$\text{Ώστε } E(x) = -\frac{\pi+4}{2} \cdot x^2 + 4x, \text{ με } x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right).$$

β) Η συνάρτηση  $E(x)$  είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με  $E'(x) = -\frac{\pi+4}{2} \cdot 2x + 4$ , άρα  $E'(x) = -(\pi+4) \cdot x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{\pi+4}$ , οπότε παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

| $x$                                                                                   | 0 | $\frac{4}{\pi+4}$                                                                   | $\frac{4}{\pi+2}$                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $E'(x)$                                                                               |   | +                                                                                   | -                                                                                    |
| $E(x)$                                                                                |   |  |  |
| <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">O.M.</div> |   |                                                                                     |                                                                                      |

Άρα το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου μεγιστοποιείται όταν  $x = \frac{4}{\pi+4}$ .

$$\text{Αφού } x_0 = \frac{4}{\pi+4}, \text{ θα είναι } E(x_0) = -\frac{\pi+4}{2} \left(\frac{4}{\pi+4}\right)^2 + 4 \cdot \frac{4}{\pi+4} = -\frac{8}{\pi+4} + \frac{16}{\pi+4} = \frac{8}{\pi+4}.$$

γ) Από τα παραπάνω προκύπτει ότι  $E(x) \leq E(x_0)$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$ , άρα

$$E(x) < E(x_0) \text{ κοντά στο } x_0.$$

$$\text{Ακόμα, } \lim_{x \rightarrow x_0} [E(x) - E(x_0)] = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{E(x) - E(x_0)} = -\infty.$$

Τέλος,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln[E(x)] = \ln[E(x_0)]$  αφού η συνάρτηση  $\ln[E(x)]$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

$$\text{Αλλά } E(x_0) = \frac{8}{\pi+4} > 1, \text{ άρα } \ln[E(x_0)] > 0.$$

$$\text{Έτσι, το ζητούμενο όριο ισούται με } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{E(x) - E(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \ln(E(x)) = -\infty.$$