

ΛΥΣΗ

α)

i. Για $x < 2$ έχουμε $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = 4$$

Για $x > 2$ έχουμε $f(x) = 2x^2 - 4$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2 - 4) = 8 - 4 = 4$$

ii. Είναι $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 4 = 4$. Στο ερώτημα i. βρήκαμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4, \text{ άρα επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 4, \text{ η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 2.$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{αν } x < 2 \\ 2x^2 - 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}, & \text{αν } x < 2 \\ 2x^2 - 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} x+2, & \text{αν } x < 2 \\ 2x^2 - 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 2)$ και στο $(2, +\infty)$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x < 2 \\ 4x, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

$$\text{Για } x < 2: \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x+2-4}{x-2} = 1.$$

$$\bullet \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Για } x > 2: \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{2x^2-4-4}{x-2} = \frac{2(x^2-4)}{x-2} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = 2x+4.$$

$$\bullet \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+4) = 8 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.