

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε

$$-2 \ln x_1 + 1 = -2 \ln x_2 + 1$$

$$-2 \ln x_1 = -2 \ln x_2$$

$$\ln x_1 = \ln x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνάρτηση $1-1$ και επομένως αντιστρέφεται.

β) Με $x > 0$ θέτουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow -2 \ln x + 1 = y \Leftrightarrow \ln x = \frac{1-y}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1-y}{2}} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^{\frac{1-y}{2}}, y \in \mathbb{R},$$

$$\text{επομένως } f^{-1}(x) = e^{\frac{1-x}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

γ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $D_f = (0, +\infty)$, ενώ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ καθώς απαιτείται $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Επομένως δεν ισχύει

$$f = g. \text{ Όμως για } x \in (0, +\infty) \text{ έχουμε } g(x) = 1 - \ln x^2 = 1 - 2 \ln x = -2 \ln x + 1 = f(x).$$

Επομένως ισχύει $f = g$ για $x \in (0, +\infty)$