

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,2)$ και $(2,5]$ ως πολυωνυμική.

Στο $x_0 = 2$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 1.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \text{ έπεται ότι } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1.$$

$$f(2) = 2^2 - 3 = 1, \text{ άρα } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ οπότε η } f \text{ είναι συνεχής στο } 2.$$

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $[-1,5]$.

β) Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 4$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}, \text{ άρα η συνάρτηση } f \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη}$$

στη θέση $x_0 = 2$.

γ) Οι υποθέσεις που απαιτούνται για την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής στη συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$ είναι:

- Η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $[-1,5]$.
- Η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,5)$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1,5]$ λόγω του ερωτήματος (α), ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,5)$ γιατί δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ λόγω του ερωτήματος (β).