

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = (x^3 + x - 1)' = 3x^2 + 1 > 0$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, αφού είναι συνεχής (ως πολυωνυμική) και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(\mathbf{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$.

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

οπότε το σύνολο τιμών είναι το $f(\mathbf{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$.

γ) Είναι $f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1$ και $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 3.$$