

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} + 1 = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1} > 0$$

αφού για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^x - 1 > 0$ οπότε $2e^x - 1 > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f''(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) - e^x(2e^x - 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$$

Άρα η f είναι κοίλη.

β) i. Είναι:

$$f(\ln 2) = \ln(2 - 1) + \ln 2 - 1 = \ln 2 - 1 \text{ και } f'(\ln 2) = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 3$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_0 = \ln 2$ είναι η

$$y - \ln 2 + 1 = 3(x - \ln 2) \Rightarrow y = 3x - 2\ln 2 - 1$$

ii. Η συνάρτηση είναι κοίλη οπότε η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της C_f είναι από την C_f και πάνω. Άρα,

$$\ln(e^x - 1) + x - 1 \leq 3x - 2\ln 2 - 1 \Rightarrow \ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$$

που είναι το ζητούμενο.

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^x - 1} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} - 1} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^x - 1}{1 - e^x} dx = - \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^x - 1}{e^x - 1} dx = - \int_{\ln 2}^{\ln 3} f'(x) dx \\ &= -[f(x)]_{\ln 2}^{\ln 3} = -f(\ln 3) + f(\ln 2) = -\ln 2 - \ln 3 + 1 + \ln 2 - 1 = -\ln 3. \end{aligned}$$