

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

(Μονάδες 8)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_0 = \ln 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$.

(Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx$.

(Μονάδες 8)