

Λύση

α) Για να ορίζεται η $f(x) = \ln(x-1)$ θα πρέπει $x > 1$, ενώ για να ορίζεται η

$g(x) = \frac{1}{x-1}$ θα πρέπει $x \neq 1$. Συνεπώς $D_f = (1, +\infty)$ και $D_g = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) \stackrel{x-1=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$

ii. Η g δεν έχει όριο στο 1 διότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$

αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$ και $x-1 < 0$ για $x < 1$,

ενώ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ (1)

αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ και $x-1 > 0$ για $x > 1$.

β)

i. Το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$ είναι το $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = (1, +\infty)$.

ii. Η συνάρτηση $f \cdot g$ ορίζεται για $x > 1$, οπότε το όριο της στο 1 ταυτίζεται με το δεξιό πλευρικό της όριο στο 1.

Έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}) = -\infty$

διότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = -\infty$ από το ερώτημα α) i. και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ από τη σχέση (1).