

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $g(1) = g(-1) = 0$ οπότε από τη σχέση $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει και στο 1 και στο -1 ελάχιστο το 0.

Η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Συνεπώς από το θεώρημα Fermat έχουμε ότι $g'(1) = g'(-1) = 0$. Όμως $g'(x) = 2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)$ οπότε $g'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$ και $g'(-1) = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και στο -1 με $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$

και $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1}$.

Για κάθε $x \neq 1$ και κοντά στο 1 έχουμε $\frac{f(x)}{x - 1} = \frac{g(x)}{(x^2 - 1)(x - 1)} = \frac{g(x)}{(x + 1)(x - 1)^2} \geq 0$

οπότε από τις ιδιότητες ορίου έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} \geq 0$ δηλαδή $f'(1) \geq 0$.

Ομοίως για κάθε $x \neq -1$ και κοντά στο -1 έχουμε

$\frac{f(x)}{x + 1} = \frac{g(x)}{(x^2 - 1)(x + 1)} = \frac{g(x)}{(x - 1)(x + 1)^2} \leq 0$ οπότε από τις ιδιότητες ορίου έχουμε ότι

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1} \leq 0$ δηλαδή $f'(-1) \leq 0$.

γ) Αφού $-1 < 1$ και $f'(-1) \leq 0 \leq f'(1)$ συμπεραίνουμε ότι η f' δεν είναι γνησίως φθίνουσα και κατ' επέκταση η f δεν είναι κοίλη.

δ) Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε :

$$\int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx = [(x^3 - 3x)f(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (3x^2 - 3)f(x)dx = 0 - 0 - 3 \int_{-1}^1 (x^2 - 1)f(x)dx \leq 0$$

αφού $(x^2 - 1)f(x) = g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $\int_{-1}^1 (x^2 - 1)f(x)dx \geq 0$ και τελικά

$$-3 \int_{-1}^1 (x^2 - 1)f(x)dx \leq 0. \text{ Συνεπώς } \int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx \leq 0.$$