

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1) = f(-1) = 0$.

(Μονάδες 6)

β) $f'(1) \geq 0$ και $f'(-1) \leq 0$.

(Μονάδες 8)

γ) η f δεν είναι κοίλη.

(Μονάδες 5)

δ) $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx \leq 0$.

(Μονάδες 6)