

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων) στο $(0, +\infty)$.

i. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$f'(x) < 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2 - x < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, 2]$, με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2]$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[2, +\infty)$, με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

ii. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2 \ln x - x) = -\infty$$

$$f(2) = 2 \ln 2 - 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{2 \ln x}{x} - 1 \right) \right] = -\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ (Κανόνας De L' Hospital)}$$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f((0, 2]) \cup f([2, +\infty)) = (-\infty, 2 \ln 2 - 2]$.

iii. Από το σύνολο τιμών της συνάρτησης f , προκύπτει ότι η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο το $2 \ln 2 - 2$. Η θέση του μέγιστου είναι το $x_0 = 2$.

β) Για να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\kappa > 2 \ln 2 - 2$, η εξίσωση είναι αδύνατη, διότι το κ δεν είναι τιμή της συνάρτησης.
- Αν $\kappa = 2 \ln 2 - 2$, η εξίσωση έχει μία ακριβώς ρίζα, την $x = 2$, η οποία είναι η θέση του ολικού μέγιστου της f .

- Αν $\kappa < 2 \ln 2 - 2$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 \in (0, 2)$ και $x_2 \in (2, +\infty)$, διότι η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα και το κ ανήκει στο $f((0, 2))$ και στο $f((2, +\infty))$.