

ΛΥΣΗ

α) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x$.

Η f είναι κυρτή και επομένως η C_f είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής. Συνεπώς $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ οπότε αφού $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

γ) Αφού $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$ έχουμε :

$$\text{i. } \int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1 - 0 = 1 \text{ οπότε } \int_0^1 f(x) dx > 1.$$

$$\text{ii. } \int_0^1 xf'(x) dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - 0 - \int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx < 1 \text{ αφού}$$

όπως δείξαμε παραπάνω $\int_0^1 f(x) dx > 1$ οπότε $-\int_0^1 f(x) dx < -1$ και τελικά

$$2 - \int_0^1 f(x) dx < 1.$$

$$\text{Συνεπώς } \int_0^1 xf'(x) dx < 1.$$