

ΛΥΣΗ

Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x - x^2$, με $0 < x < 2$.

α) Αν στην ποσότητα $2x - x^2$ βγάλουμε κοινό παράγοντα το x , έχουμε ότι $f(x) = x \cdot (2 - x)$, για κάθε $0 < x < 2$.

β) Από το ερώτημα α) είναι $f(x) = x \cdot (2 - x)$. Αν θέσουμε $A = x$ και $B = 2 - x$ και

εφαρμόσουμε την ανισότητα $A \cdot B \leq \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$ έχουμε διαδοχικά,

$$f(x) = x \cdot (2 - x) \leq \left(\frac{x+(2-x)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1, \text{ για κάθε } 0 < x < 2.$$

Και άρα αποδείξαμε το ζητούμενο.

γ) Από το ερώτημα β) έχουμε ότι $f(x) \leq 1$, για κάθε $0 < x < 2$.

$$\text{Όμως, } f(1) = 2 \cdot 1 - 1^2 = 2 - 1 = 1.$$

Άρα, $f(x) \leq f(1)$, για κάθε $0 < x < 2$.

Επομένως, αρκεί να πάρω $\alpha = 1$.