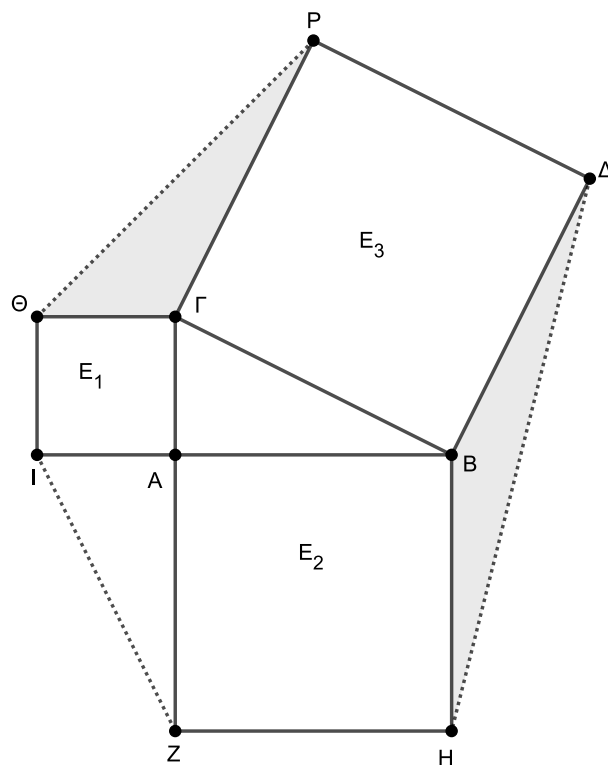


ΛΥΣΗ



α) Από τα δεδομένα έχουμε: $(AΓΘΙ) = E_1$, $(ABHZ) = E_2$, $(BΓPΔ) = E_3$ και ισχύουν:

$$E_2 = 4E_1 \quad (1), \quad E_3 = 5E_1 \quad (2).$$

α) Είναι $BΓ = \alpha$, $AΓ = \beta$, $AB = \gamma$, οι πλευρές του τριγώνου $ABΓ$. Τότε:

$$E_1 = \beta^2, \quad E_2 = \gamma^2 \quad \text{και} \quad E_3 = \alpha^2.$$

Από την υπόθεση ισχύουν τα εξής:

$$E_2 = 4E_1 \quad \text{ή} \quad \gamma^2 = 4\beta^2$$

$$E_3 = 5E_1 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = 5\beta^2 \quad (1)$$

$\beta^2 + \gamma^2 = \beta^2 + 4\beta^2 = 5\beta^2$ Από τη σχέση (1) έχουμε ότι $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, οπότε το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ορθογώνιο, με υποτείνουσα την πλευρά α , άρα ορθή γωνία την A .

β)

i. Αν $AΓ = 1$ ή $\beta = 1$ τότε $E_1 = \beta^2 = 1$.

$$E_2 = 4E_1 = 4, \quad \text{άρα} \quad \gamma^2 = 4, \quad \text{οπότε} \quad \gamma = 2$$

$$E_3 = 5E_1 = 5$$

$$(ABΓ) = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma = \frac{1}{2} 1 \cdot 2 = 1, \quad \text{αφού το τρίγωνο } ABΓ \text{ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές}$$

β και γ .

ii. Λόγω των τετραγώνων, για τις γωνίες με κορυφή το B έχουμε:

$$\widehat{H\hat{B}\Delta} + \widehat{\Delta\hat{B}\Gamma} + \widehat{A\hat{B}\Gamma} + \widehat{A\hat{B}H} = 360^\circ \text{ ή } \widehat{H\hat{B}\Delta} + 90^\circ + \widehat{A\hat{B}\Gamma} + 90^\circ = 360^\circ \text{ ή } \widehat{H\hat{B}\Delta} + \widehat{A\hat{B}\Gamma} = 180^\circ.$$

Δηλαδή οι γωνίες $H\hat{B}\Delta$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές. Άρα ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $BH\Delta$, $AB\Gamma$ θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που

περιέχουν τις παραπληρωματικές γωνίες. Δηλαδή $\frac{(BH\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{BH \cdot BD}{B\Gamma \cdot BA} = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\alpha \cdot \gamma} = 1$, οπότε

$$\frac{(BH\Delta)}{(AB\Gamma)} = 1, \text{ άρα } (BH\Delta) = (AB\Gamma) = 1.$$

Όμοια, για τις γωνίες με κορυφή το Γ έχουμε:

$$\widehat{\Theta\hat{\Gamma}P} + \widehat{\Theta\hat{\Gamma}A} + \widehat{A\hat{\Gamma}B} + \widehat{B\hat{\Gamma}P} = 360^\circ \text{ ή } \widehat{\Theta\hat{\Gamma}P} + 90^\circ + \widehat{A\hat{\Gamma}B} + 90^\circ = 360^\circ \text{ ή } \widehat{\Theta\hat{\Gamma}P} + \widehat{A\hat{\Gamma}B} = 180^\circ.$$

Δηλαδή οι γωνίες $\Theta\hat{\Gamma}P$ και $A\hat{\Gamma}B$ είναι παραπληρωματικές. Άρα ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $\Gamma P\Theta$, $AB\Gamma$ θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που

περιέχουν τις παραπληρωματικές γωνίες. Δηλαδή $\frac{(\Gamma P\Theta)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma P \cdot \Gamma\Theta}{\Gamma A \cdot \Gamma B} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \alpha} = 1$, οπότε

$$\frac{(\Gamma P\Theta)}{(AB\Gamma)} = 1, \text{ άρα } (\Gamma P\Theta) = (AB\Gamma) = 1.$$

- iii. Το τρίγωνο AIZ , είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές β , γ , άρα $(AIZ) = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma$,

$$\text{Άρα } (AIZ) = (AB\Gamma) = 1.$$

Το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία $Z, H, \Delta, P, \Theta, I$ έχει εμβαδό ίσο με

$$E_1 + E_2 + E_3 + (AIZ) + (BH\Delta) + (\Gamma P\Theta) + (AB\Gamma) = 1 + 4 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14.$$