

ΛΥΣΗ

α) Το -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $x^3 + x^2 + x + 1$, αφού $(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$.

β) Το -1 είναι η μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $x^3 + x^2 + x + 1$, καθώς από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι «οι ακέραιες ρίζες ενός πολυωνύμου είναι αναγκαστικά διαιρέτες του σταθερού όρου». Εδώ, ο σταθερός όρος είναι το 1 και άρα οι ακέραιοι διαιρέτες του είναι το -1 και το 1 .

Όμως, το 1 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $x^3 + x^2 + x + 1$, αφού $1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

Ενώ, από το ερώτημα α), ξέρουμε ότι το -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $x^3 + x^2 + x + 1$.

Συνεπώς, το πολυώνυμο $x^3 + x^2 + x + 1$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα το -1 .

γ) Ο βαθμός του πολυωνύμου $x^3 + x^2 + x + 1$ είναι 3 .

Ο βαθμός του πολυωνύμου $x^2 + 1$ είναι 2 .

Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων ισούται με το άθροισμα των βαθμών των δύο πολυωνύμων. Οπότε, από την ισότητα

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1) \cdot P(x)$$

έπεται

$$3 = 2 + [\text{βαθμός του } P(x)]$$

επομένως,

$$\text{βαθμός του } P(x) = 3 - 2 = 1$$

άρα, πολυώνυμο $P(x)$ που ικανοποιεί την ισότητα $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1) \cdot P(x)$ πρέπει να έχει αναγκαστικά βαθμό 1 .