

ΛΥΣΗ

α) Ας δώσουμε ένα όνομα στο πολυώνυμο, έστω $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

Από τον ορισμό, ξέρουμε ότι ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ εάν $P(\rho) = 0$.

Οπότε, το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ εάν $P(1) = 0$.

Όμως, $P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$.

Άρα, το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

β) Ομαδοποιώντας αρχικά και στη συνέχεια παραγοντοποιώντας, έχουμε διαδοχικά $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^3 - x^2) + (x - 1) = x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$, το οποίο είναι αυτό που έπρεπε να δείξουμε.

Εναλλακτικά: Θα μπορούσε κανείς να εφαρμόσει επιμεριστική ιδιότητα στο γινόμενο $(x - 1) \cdot (x^2 + 1)$ και να καταλήξει στην ποσότητα $x^3 - x^2 + x - 1$.

γ) Από το ερώτημα β) έχουμε ότι η εξίσωση $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη

$$(x - 1) \cdot (x^2 + 1) = 0.$$

Όμως, ο δεύτερος παράγοντας του 1^{ου} μέλους είναι μόνιμα θετικός, οπότε η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x - 1 = 0$$

δηλαδή,

$$x = 1.$$

Επομένως, το πολυωνύμου $x^3 - x^2 + x - 1$ έχει μοναδική ρίζα το 1.