

ΛΥΣΗ

α) Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3} \cdot x^3 + 1\right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$$

Άρα, $f'(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1, \frac{2}{3})$ είναι ίσος με:

$$\lambda = f'(-1) = (-1)^2 = 1.$$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$ είναι:

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = 1 \cdot x + \beta \Leftrightarrow y = x + \beta.$$

Επειδή το σημείο $A(-1, \frac{2}{3})$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε:

$$\frac{2}{3} = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = x + \frac{5}{3}$.