

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f(x) \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(x^2 - x + 1) \geq 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \geq 0$$

που ισχύει. Η ισότητα $f(x) = \frac{3}{4}$ ισχύει μόνο όταν $x = \frac{1}{2}$.

β) Οι συναρτήσεις έχουν αντίστοιχα πεδία ορισμού $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_g = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ και η σύνθεση

$h = g \circ f$ ορίζεται μόνο όταν υπάρχουν αριθμοί x ώστε

$$x \in \mathbb{D}_f \text{ και } f(x) \in \mathbb{D}_g$$

Είναι:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{D}_f \\ f(x) \in \mathbb{D}_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ από το ερώτημα (α).

Άρα $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$ και

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 - x + 1) - 3} = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1|$$

γ) Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1) = -1 < 0$, οπότε κοντά στο $x_0 = 0$ είναι $2x - 1 < 0$, άρα $|2x - 1| = -2x + 1$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x + 1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 1 - 1}{\sqrt{x + 1} - 1} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x + 1} + 1)}{(\sqrt{x + 1} - 1)(\sqrt{x + 1} + 1)} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x + 1} + 1)}{x + 1 - 1} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x + 1} + 1) = -4 \end{aligned}$$