

## ΛΥΣΗ

α) Έστω  $\alpha, \beta \in (-\infty, 1]$  με  $f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow \sqrt{1-\alpha} = \sqrt{1-\beta} \Rightarrow 1-\alpha = 1-\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ ,  
οπότε η  $f$  είναι "1-1" στο  $(-\infty, 1]$ .

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα  $x'x$  τέμνει την γραφική παράσταση το πολύ σε ένα σημείο, δηλαδή δεν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

Αφού η  $f$  είναι "1-1" θα υπάρχει η συνάρτηση  $f^{-1}$ .

β) Για να βρούμε την αντίστροφη της  $f$  θέτουμε  $y = f(x)$  και λύνουμε ως προς  $x$ .

$y = \sqrt{1-x} \geq 0$  και ισοδύναμα παίρνουμε  $y^2 = 1-x \Leftrightarrow x = 1-y^2$  με  $x \in (-\infty, 1]$  αφού  $1-y^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y^2$ , ισχύει.

Βρήκαμε ότι για κάθε τιμή  $y \geq 0$ , υπάρχει μοναδικό  $x \in (-\infty, 1]$  ώστε  $y = f(x)$ .

Άρα  $f^{-1}(y) = 1-y^2$  με  $y \geq 0$ , δηλαδή  $f^{-1}(x) = 1-x^2$  με  $x \geq 0$ .

γ) Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ , παίρνουμε το παρακάτω σχήμα.

