

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν και μόνο όταν $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ \text{και} \\ 1-\sqrt{1-x} \geq 0 \end{cases}$

Είναι λοιπόν

$$1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

$$1-\sqrt{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \leq 1 \Leftrightarrow 1-x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Επομένως $0 \leq x \leq 1$ και ως εκ τούτου $D_f = [0,1]$.

β)

i. Έστω $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Θα δείξουμε ότι $x_1 = x_2$. Πράγματι έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ \sqrt{1-\sqrt{1-x_1}} &= \sqrt{1-\sqrt{1-x_2}} \\ 1-\sqrt{1-x_1} &= 1-\sqrt{1-x_2} \\ \sqrt{1-x_1} &= \sqrt{1-x_2} \\ 1-x_1 &= 1-x_2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

ii. Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$. Στη συνέχεια έχουμε:

$$f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = f(0) \xrightarrow{f^{-1}} f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \xrightarrow{f^{-1}} x = 0.$$

Επομένως η εξίσωση $f(f(x)) = 0, x \in [0,1]$ έχει μοναδική ρίζα το 0.