

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1^3 < x_2^3 \end{cases} \Rightarrow x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \Rightarrow x_1^3 + x_1 + 1 < x_2^3 + x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Εναλλακτική απάντηση:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

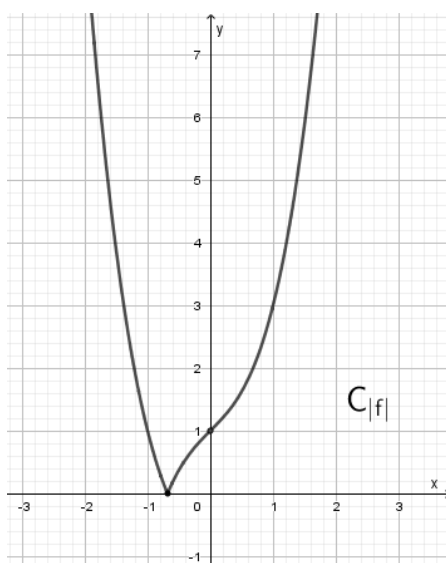
β) Παρατηρούμε ότι και οι τρεις γραφικές παραστάσεις διέρχονται από το σημείο $A(0,1)$, το οποίο ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f , διότι $f(0) = 1$. Αλλά

- Η συνάρτηση στο σχήμα 1 δεν μπορεί να αποτελεί την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , διότι το πεδίο ορισμού της είναι το διάστημα $[0, +\infty)$.
- Η συνάρτηση στο σχήμα 2 δεν μπορεί να αποτελεί την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , διότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως, η f παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 3.

γ)

- Ως γνωστόν, η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$, πάνω από τον άξονα $x'x$, καθώς επίσης και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. Επομένως, είναι:



ii. Έχουμε την εξίσωση $|f(x)| = 2023$.

Ουσιαστικά, αναζητάμε το πλήθος των κοινών σημείων της $C_{|f|}$ και της οριζόντιας ευθείας $\varepsilon: y = 2023$. Παρατηρώντας την $C_{|f|}$, από το προηγούμενο ερώτημα, βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο κοινά σημεία.

