

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$$f(x^2) < f(x) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

β) Είναι $\alpha^2 < \alpha \Rightarrow \alpha^2 - \alpha < 0 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(\alpha^2 - \alpha) < f(0) \Rightarrow f(\alpha^2 - \alpha) - f(0) < 0$.

Επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Επομένως, είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)] x) = -\infty$$

γ) Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε είναι και “1 – 1”. Επομένως, έχουμε

$$f(e^x - 1) = f(0) \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$