

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$ είναι $x^2 + y^2 = \rho^2$ (1), όπου ρ η ακτίνα του κύκλου. Επειδή ο κύκλος διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ θα πρέπει οι συντεταγμένες του A να επαληθεύουν την εξίσωση (1), δηλαδή $1^2 + 2^2 = \rho^2$, άρα $\rho^2 = 5$.

Οπότε, η (1) γίνεται:

$$x^2 + y^2 = 5$$

β)

i. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (1) στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι:

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2 \quad (2)$$

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο του $A(1,2)$ θα είναι:

$$x + 2y = 5$$

ii. Για να είναι το σημείο B αντιδιαμετρικό του A , θα πρέπει το κέντρο O να είναι το μέσο του τμήματος AB . Επομένως θα ισχύουν:

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 0 = \frac{1 + x_B}{2} \\ 0 = \frac{2 + y_B}{2} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 0 = 1 + x_B \\ 0 = 2 + y_B \end{cases}, \text{ άρα } x_B = -1 \text{ και } y_B = -2.$$

Άρα είναι $B(-1,-2)$.