

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0,-1)$ και $B(-1,0)$ ισχύουν $f(0)=-1$ και $f(-1)=0$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(-1)=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0^4 + \alpha \cdot 0^2 + \beta = -1 \\ (-1)^4 + \alpha(-1)^2 + \beta = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ 1 + \alpha + \beta = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ 1 + \alpha - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

β) Για να βρούμε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ αρκεί να επιλύσουμε την ανίσωση $f(x) < 0$, όπου $f(x) = x^4 + 0x^2 - 1 = x^4 - 1$.

Είναι:

$$\begin{aligned}f(x) < 0 &\Leftrightarrow x^4 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) < 0 \stackrel{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{1} \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.\end{aligned}$$

β τρόπος για την επίλυση της ανίσωσης $x^2 - 1 < 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4$ και οι ρίζες του είναι οι αριθμοί:

$$x_1 = \frac{0 + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{0 - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1. \quad \text{Το πρόσημο του } x^2 - 1 \text{ φαίνεται στον}$$

παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		+	-	+

Οπότε είναι $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

