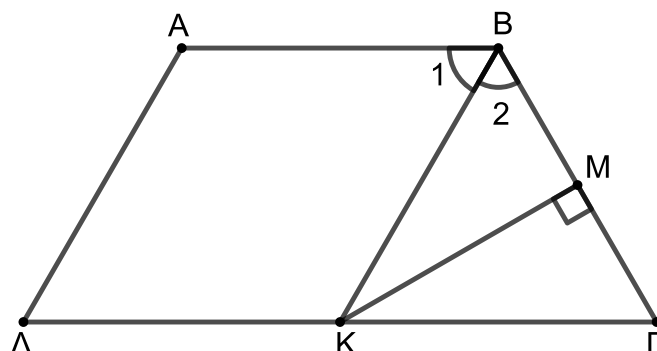


ΛΥΣΗ



α) Οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από τη $B\Gamma$. Άρα $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$.

Επειδή από την υπόθεση έχουμε ότι $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$, τότε $3\widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 60^\circ$. Άρα $\widehat{B} = 120^\circ$. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο οπότε οι γωνίες που είναι προσκείμενες σε κάθε του βάση είναι ίσες, άρα $\widehat{A} = \widehat{B} = 120^\circ$ και $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ$.

β)

- i. Επειδή η BK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$, είναι $\widehat{ABK} = \widehat{KB\Gamma} = 60^\circ$. Στο τρίγωνο $BK\Gamma$ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60° οπότε και $\widehat{BK\Gamma} = 60^\circ$, δηλαδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, επομένως $KB = K\Gamma = B\Gamma$.

Επειδή $B\Gamma = AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ από υπόθεση θα είναι και $\Delta K = KB = AB = A\Delta$, οπότε το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος γιατί έχει τις πλευρές του ίσες.

- ii. Το τρίγωνο $KB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και το KM είναι ύψος του αφού $KM \perp B\Gamma$, άρα θα είναι και διάμεσος της πλευράς $B\Gamma$, συνεπώς το M είναι μέσο του $B\Gamma$.