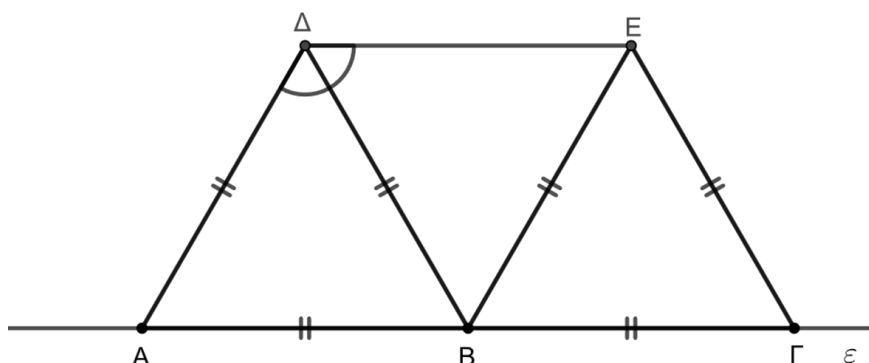


ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B και Γ πάνω σε ευθεία ε έτσι ώστε $AB = B\Gamma$ και κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε .



α) Οι γωνίες των ισόπλευρων τριγώνων $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ είναι 60° καθεμιά.

Η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι ευθεία, οπότε:

$$A\hat{B}\Delta + \Delta\hat{B}E + E\hat{B}\Gamma = 180^\circ \text{ ή } 60^\circ + \Delta\hat{B}E + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\text{Άρα, } \Delta\hat{B}E = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

β) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $AB\Delta$ ισχύει:

$$AB = A\Delta = B\Delta \quad (1)$$

Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $B\Gamma E$ ισχύει:

$$B\Gamma = BE = \Gamma E \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $B\Delta = BE$, αφού $AB = B\Gamma$ από υπόθεση.

Επομένως, το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση ΔE , οπότε οι γωνίες που είναι προσκείμενες στη βάση θα είναι ίσες. Συνεπώς, $B\hat{\Delta}E = B\hat{E}\Delta$ (3).

Στο τρίγωνο $B\Delta E$ ισχύει:

$$B\hat{\Delta}E + B\hat{E}\Delta + \Delta\hat{B}E = 180^\circ \text{ ή } B\hat{\Delta}E + B\hat{E}\Delta + 60^\circ = 180^\circ \text{ ή } 2B\hat{\Delta}E = 120^\circ$$

$$\text{Άρα, } B\hat{\Delta}E = 60^\circ \text{ και } B\hat{E}\Delta = 60^\circ \text{ λόγω της σχέσης (3).}$$

Αφού οι γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$ είναι ίσες με 60° καθεμιά, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

γ) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $B\Delta E$ ισχύει:

$$\Delta E = BE = B\Delta \quad (4)$$

Το τετράπλευρο $A\Delta EB$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, αφού $A\Delta = AB = BE = \Delta E$ από τις σχέσεις (1), (2) και (4), οπότε είναι ρόμβος.